

Ισομετρία:

8/5/17

$$f: (E, \langle, \rangle_E) \rightarrow (F, \langle, \rangle_F)$$

ορθομετρία

$$\|f(\vec{a})\| = \|\vec{a}\|$$

$$\langle f(\vec{a}), f(\vec{b}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(f(\vec{a}), f(\vec{b}))$$

O.K.B του $E \rightarrow$ O.K.B του F

$f: (E, \langle, \rangle_E) \rightarrow (E, \langle, \rangle_E)$ ισομετρία

$$[f]_{\gamma}^{\gamma} = A \text{ ορθογώνιος}$$

γ O.K.B

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ορθογώνιος} \quad A^t A = I_n$$

$$A \text{ ορθογώνιος} \Leftrightarrow \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n \text{ O.K.B } \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \text{ O.K.B } \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Αν A ορθογώνιος τότε $\det A = 1$
ή $\det A = -1$

$$\det(A^t A) = \det I_n$$

$$\det A^t \det A = 1$$

$$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$$

Πρόταση: Έστω $f: E \rightarrow E$ ισομετρία. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή της f τότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.

Απόδειξη:
Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της f
Από υπάρχει $\vec{u} \in E$ με $\vec{u} \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \xrightarrow{f \text{ ισομετρία}} \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \text{ άρα}$$

$$\|\lambda \vec{u}\| = \|\vec{u}\|$$

$$\left. \begin{array}{l} |\lambda| \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| \\ \|\vec{u}\| \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Αν A ορθογώνιος πίνακας και $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή τότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Απόδειξη: $\left(\begin{array}{l} f_A: \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1} \\ f_A(X) = AX \quad f_A \text{ είναι ισομετρία} \\ [f_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A \end{array} \right)$

Απόδειξη: λ ιδιοτιμή του πίνακα A

$0_{n \times 1} \neq X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ τέτοια ώστε $AX = \lambda X$

$$\langle AX, AX \rangle = \langle \lambda X, \lambda X \rangle$$

$$(AX)^t AX = (\lambda X)^t (\lambda X)$$

$$X^t \underbrace{A^t A}_{\text{ορθογώνιος}} X = \lambda^2 X^t X \rightarrow X^t X = \lambda X^t X$$

ορθογώνιος

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = \lambda^2 (X_1^2 + \dots + X_n^2)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 \neq 0 \text{ άρα } 1 = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

Πρόταση: Έστω $\gamma = \{\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_n\}$ και $\delta = \{\vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_n\}$ ορθοκανονικές βάσεις του Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$. Ο πίνακας αλλαγής βάσης $[I]_{\gamma}^{\delta}$ είναι ορθογώνιος

Απόδειξη: $[I]_{\gamma}^{\delta} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1i} & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2i} & b_{2j} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{ni} & b_{nj} & b_{nn} \end{pmatrix}$

i στήλη j στήλη

$$\vec{\gamma}_i = b_{1i} \vec{\delta}_1 + b_{2i} \vec{\delta}_2 + \dots + b_{ni} \vec{\delta}_n$$

$$\vec{\gamma}_j = b_{1j} \vec{\delta}_1 + b_{2j} \vec{\delta}_2 + \dots + b_{nj} \vec{\delta}_n$$

$$\gamma \text{ OKB } \langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle = 0 \quad | \quad \gamma \text{ OKB } \langle \vec{f}_i, \vec{f}_j \rangle = 1$$

$$b_{1j}^2 + b_{2j}^2 + \dots + b_{nj}^2 = 1$$

$$\delta \text{ OKB } b_{1i} b_{1j} + b_{2i} b_{2j} + \dots + b_{ni} b_{nj} = 0$$

Σ_i, Σ_j κάθετες

Το μινος κάθε στήλης του $[I]_r^s$ είναι ένα και

κάθε δύο διαφορετικές στήλες είναι κάθετες

μεταξύ τους

$$[F]_r^s = [I]_r^s [F]_r^s [I]_s^r$$

$$\Downarrow$$

$$[I]_r^s$$

ορθώνου

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

A ορθώνου

1^η περίπτωση: $\det A = 1 = \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha^2 + \beta^2$ ή κάθε στήλη
 έχει μινος 1
 άρα $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

$$A^{-1} = A^t$$

$$\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\delta = \alpha$$

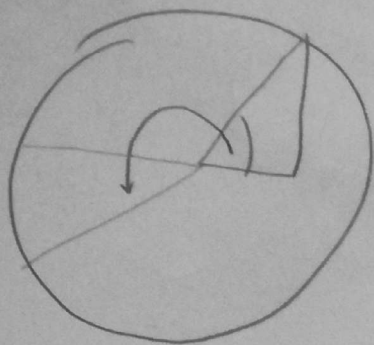
$$\gamma = -\beta$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$a = b \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$



$$(a, b) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$a = \cos \theta$$

$$b = \sin \theta$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

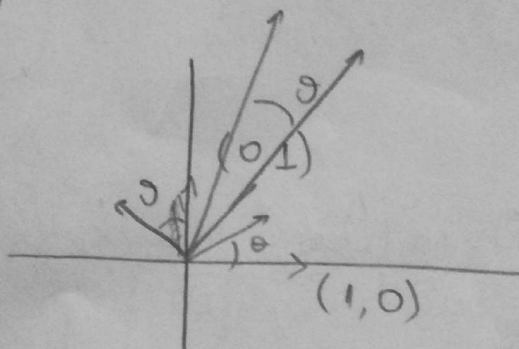
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y)$$

f isometry

$\forall$ isometry $f(x, y) = (\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y)$ given by rotation by angle θ

$$f(1, 0) = (\cos \theta, \sin \theta)$$



$$0 < \theta < \pi$$

$$\pi < \theta < 2\pi$$

if θ is
rotation

2^n περιστροφή $\det A = -1 = a\delta - b\gamma$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A^{-1} = A^t \text{ (για } A \text{ ορθογώνιος)}$$

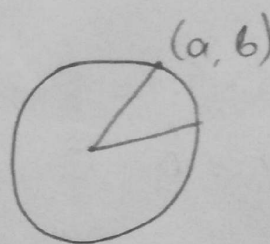
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\delta & \gamma \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\delta = a &\Rightarrow \delta = -a \\ \gamma = b \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Αρα } a\delta - b\gamma = -a^2 - b^2 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = 1}$$



$$a^2 + b^2 = 1$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta \\ b &= \sin \theta \end{aligned}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (\cos \theta x + \sin \theta y, \sin \theta x - \cos \theta y)$$

$$[f]_{\varepsilon}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} \cos \theta - x & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - x \end{vmatrix} = -(\cos \theta - x)(\cos \theta + x) - \sin^2 \theta =$$

$$= -(\cos^2 \theta - x^2) - \sin^2 \theta = x^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

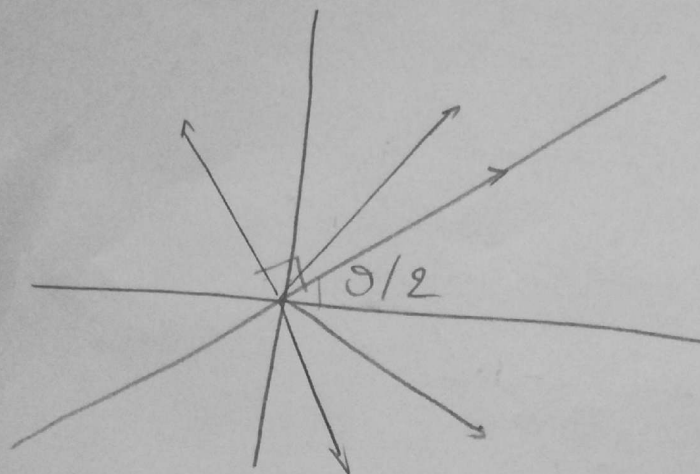
$$x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Η μορφή $f(x, y) = (\cos \theta x + \sin \theta y, \sin \theta x - \cos \theta y)$ να πιστέψουμε ότι αν $\theta = 0$ τότε $f(x, y) = (x, y)$ και αν $\theta = \pi$ τότε $f(x, y) = (-x, -y)$.
 Η μορφή $f(x, y) = (\cos \theta x + \sin \theta y, \sin \theta x - \cos \theta y)$ να πιστέψουμε ότι αν $\theta = \pi/2$ τότε $f(x, y) = (y, -x)$ και αν $\theta = 3\pi/2$ τότε $f(x, y) = (-y, x)$.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (\cos \theta x + \eta \mu \theta y, \eta \mu \theta x - \cos \theta y)$$

$$[f]_{\varepsilon}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \eta \mu \theta \\ \eta \mu \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$



Πρόταση: Έστω ότι η ισομετρία $f: E \rightarrow E$ έχει ιδιοτιμές ω και $-\omega$. Τότε οι ιδιοχώροι $V(\omega)$ και $V(-\omega)$ είναι ορθογώνιοι.

$$\begin{aligned} \text{Έστω } \vec{a} \in V(\omega) \quad f(\vec{a}) &= \omega \vec{a} \\ \vec{b} \in V(-\omega) \quad f(\vec{b}) &= -\omega \vec{b} \end{aligned}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle f(\vec{a}), f(\vec{b}) \rangle = \langle \omega \vec{a}, -\omega \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Λήμμα Euler: Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ορθογώνιος πίνακας με $\det A = 1$. Τότε ο A έχει το 1 ιδιοτιμή και παριστά-
 νει βζροφή εννέδου (n) κατά γωνία θ γύρω από άξονα
 (ε) ο οποίος είναι κάθετος στο εννέδο (n). Συνήθως
 υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε ο A να είναι
 όμοιος με τον πίνακα P .

Απόδειξη:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = P^t A P$$

$$F_A = AX \quad \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$$